

## Chapitre 6.

### Séries de Fourier.

#### I – Séries trigonométriques.

##### Définition 1.

On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \quad (1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\omega > 0$ ,  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .

Le problème est de déterminer l'ensemble  $\Delta$  tel que la série (1) soit convergente pour tout  $x \in \Delta$ .

##### Remarque.

Supposons que la série (1) converge et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x).$$

Sachant que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \cos(n\omega x + 2nk\pi) = \cos(n\omega x)$$

$$\sin(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) = \sin(n\omega x + 2nk\pi) = \sin(n\omega x).$$

Alors la série (1) converge en tout point de la forme  $x + \frac{2k\pi}{\omega}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Si la série (1) converge dans  $\mathbb{R}$ , on aura  $f(x) = f\left(x + \frac{2k\pi}{\omega}\right)$  et par suite la fonction  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi/\omega$ .

En conclusion, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) La série trigonométrique (1) converge dans  $\mathbb{R}$ .
- ii) La série trigonométrique (1) converge dans  $[0, 2\pi/\omega]$ .
- iii) La série trigonométrique (1) converge dans  $[\alpha, \alpha + 2\pi/\omega]$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

##### Proposition 1.

Si les séries numériques  $(\sum a_n)$  et  $(\sum b_n)$  sont absolument convergentes alors la série trigonométrique (1) est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ ; donc absolument et uniformément sur  $\mathbb{R}$ .

**Preuve :**

C'est évident puisque  $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$ .

## Proposition 2.

Si les suites numériques  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour  $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Preuve.** C'est une application directe du résultat sur les séries numériques d'Abel pour un  $x$  fixé. La première hypothèse n'est pas vérifiée pour  $x = 2k\pi/\omega$ . Le reste est valable.

## Calcul des coefficients de la série trigonométrique (cas réel)

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique

(1) et posons  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x))$ . Alors

$$f(x) \cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2} \cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \cos(n\omega x)]$$

$$f(x) \sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2} \sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) \sin(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \sin(n\omega x)]$$

La convergence uniforme nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi/\omega} \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{2\pi/\omega} \sin(k\omega x) \cos(n\omega x) dx. \\ \bullet \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \sin(n\omega x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi/\omega} \cos(k\omega x) \sin(n\omega x) dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{2\pi/\omega} \sin(k\omega x) \sin(n\omega x) dx. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } k = n \end{cases} \\ \int_0^{2\pi/\omega} \sin(k\omega x) \sin(n\omega x) dx &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi/\omega & \text{si } k = n \end{cases} \\ \int_0^{2\pi/\omega} \cos(n\omega x) \sin(k\omega x) dx &= 0. \end{aligned}$$

On déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

Ces expressions sont valables même pour  $n = 0$ .



### Lemme 1.

Soit  $f$  une fonction périodique de période  $T > 0$  et intégrable dans l'intervalle  $[0, T]$ . Alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_0^T f(t)dt = \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt$ .

Moyennant ce lemme, les coefficients peuvent s'écrire :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx = \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi/\omega} f(x) \cos(n\omega x) dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi/\omega} f(x) \sin(n\omega x) dx; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

En particulier si  $\omega = 1$ , cas des fonctions  $2\pi$ -périodique ;

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

## II – Séries de Fourier

Dans cette partie, on ne va considérer que les fonctions de période  $2\pi$ . A chaque fois on précisera les formules pour une période quelconque.

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application périodique de période  $T = 2\pi$ . On suppose que  $\int_I |f(t)|dt$  converge sur un intervalle  $I = [\alpha, \alpha + 2\pi]$  de longueur  $2\pi$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

### Définition 2.

On appelle série de Fourier associée à  $f$ , la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

$$\text{avec } a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \text{ et } b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à  $f$  est-elle convergente ?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers  $f$  ?

Rappelons la notion de discontinuité de première espèce.

### Définition 3.

Une fonction  $f$  admet une discontinuité de première espèce en un point  $x_0$  si les limites à droite et à gauche de  $x_0$  existent. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité.)

### Théorème 1. (Dirichlet)

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction périodique de période  $T = 2\pi$  satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :

D1) Les discontinuités de  $f$  (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.

D2)  $f$  admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à  $f$  est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$
$$= \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction  $f$  est continue.

Les notations  $f(x+0)$  et  $f(x-0)$  représentent respectivement les limites à droite et à gauche de  $f$  au point  $x$ .

**Remarque** Il y a un autre théorème équivalent au théorème de Dirichlet dû à Jordan.

### Théorème 2. (Jordan)

Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction périodique de période  $T = 2\pi$  satisfaisant aux

conditions suivantes :

J1) Il existe  $M > 0$  tel que  $|f(x)| \leq M$  (i.e  $f$  est bornée)

J2) On peut partager l'intervalle  $[\alpha, \alpha + 2\pi]$  en sous-intervalles  $[\alpha_1, \alpha_2]$ ,  $[\alpha_2, \alpha_3]$ , ...,  $[\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ , avec  $\alpha_1 = \alpha$  et  $\alpha_n = \alpha + 2\pi$  tels que la restriction  $f|_{[\alpha_j, \alpha_{j+1}]}$  soit monotone et continue.

Alors la série de Fourier associée à  $f$  est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$
$$= \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus, la convergence est uniforme sur tout intervalle où  $f$  est continue.



### Remarque.

Nous allons étudier quelques cas particuliers. Rappelons d'abord quelques propriétés.  
 $f : [-k, k] \mapsto \mathbb{R}$  une fonction intégrable sur  $[-k, k]$ .

Si  $f$  est paire alors  $\int_{-k}^k f(x) dx = 2 \int_0^k f(x) dx$ .

Si  $f$  est impaire  $\int_{-k}^k f(x) dx = 0$ .

Si  $f$  est développable en série de Fourier :

a) Si  $f$  est paire :

$$\bullet a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

car la fonction  $x \mapsto f(x) \cos(nx)$  est paire.

$$\bullet b_n = 0 \text{ car la fonction } x \mapsto f(x) \sin(nx) \text{ est impaire}$$

b) Si  $f$  est impaire :

$$\bullet a_n = 0 \text{ car la fonction } x \mapsto f(x) \cos(nx) \text{ est impaire.}$$

$$\bullet b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

car la fonction  $x \mapsto f(x) \sin(nx)$  est paire.

### Résumé.

$f$  fonction paire :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

$$b_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$f$  fonction impaire :

$$a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

### Exemples. 1)

Soit  $f : ]-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$  une fonction périodique,  $T = 2\pi$  définie par  $f(x) = x$ .

1. Les discontinuités de  $f$  sont les points de la forme  $x_k = (2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et sont de première espèce car  $f(\pi+0) = \pi$  et  $f(\pi-0) = -\pi$

2.  $f$  est partout dérivable sauf aux points  $x_k$ . En ces points nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1.$$

$f$  vérifie les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier.

$f$  est impaire donc  $a_0 = a_n = 0$  et  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  et par suite

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

2)

Soit  $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$  une fonction de période  $T = 2\pi$ , définie par  $f(x) = |x|$ .

1. On a  $|f(x)| \leq \pi$

2.  $f|_{[-\pi, 0]}$  est décroissante continue et  $f|_{[0, \pi]}$  est croissante continue.

$f$  satisfait les conditions du théorème de Jordan donc développable en série de Fourier. De plus  $f$  est paire, ce qui nous donne  $b_n = 0$ .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

La série de Fourier converge alors vers  $f$  et on a  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$ .

Puisque  $f$  est continue, la convergence est uniforme.

Remarquons enfin que l'égalité  $f(0) = 0$  se traduit par  $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$  et par conséquent

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

## Développement en séries de Fourier pour les fonctions non périodiques

Il est clair que le développement en série de Fourier se pratique sur les fonctions périodiques. Cependant, il est possible, dans certains cas, de faire de tels développements pour des fonctions quelconques.

Soit  $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$  une fonction non périodique définie sur l'intervalle  $[a, b]$ . Soit  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction périodique de période  $T \geq b - a$  telle que la restriction  $g|_{[a, b]} = f$ . Si  $g$  satisfait

les conditions de Dirichlet, on aura :

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

avec  $a_n$  et  $b_n$  les coefficients de Fourier associés à  $g$ . La somme de cette série coïncide partout avec  $f$  dans l'intervalle  $[a, b]$  sauf peut-être aux points de discontinuités de  $f$ .

### Remarque.

Soit  $f : ]0, \ell[ \mapsto \mathbb{R}$  une fonction quelconque, et  $\ell > 0$ . On suppose que  $f$  peut-être prolongée sur  $] - \ell, 0[$  et que les conditions de Dirichlet ou de Jordan soient satisfaites. Dans ce cas, on a le choix sur ce prolongement. On peut choisir soit un prolongement pair soit un prolongement impair pour éviter les longs calculs des coefficients.

### Exercice.

Donner une série de Fourier de période  $2\pi$  qui coïncide sur  $]0, \pi[$  avec la fonction  $f(x) = e^x$ .



## Solutions.

Ici on ne précise que l'intervalle où la série de Fourier coïncide avec  $f$ , c'est à dire  $]0, \pi[$ . Comme la période de la série de Fourier est  $2\pi$ , il y'a alors une infinité de réponses ; examinons trois cas différents.

Notons  $\tilde{f}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , le prolongement de  $f$  à  $\mathbb{R}$  tout entier.  $\tilde{f}_i$  sera une fonction de période  $2\pi$  qui vaut exactement  $e^x$  pour tout  $x$  dans  $]0, \pi[$ .

- a) Choisissons un prolongement pair et posons :  $\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ e^{-x} & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$ .

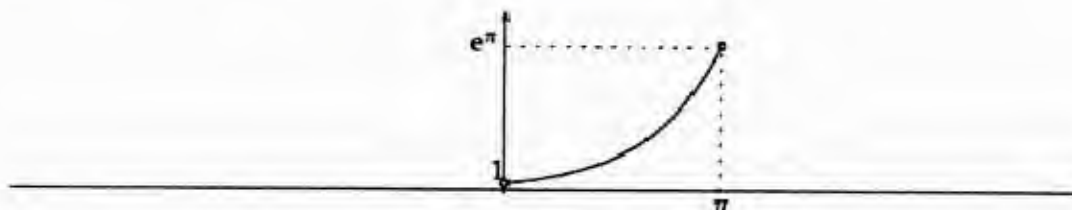
On vérifie aisément que  $\tilde{f}_1$  est une fonction paire. Posons  $\tilde{f}_1(0) = 1$  et  $\tilde{f}_1(\pi) = e^\pi$ , on a alors un prolongement continu sur  $\mathbb{R}$ . Le graphe de  $\tilde{f}_1$  et celui de la série de Fourier seront identiques.

Le calcul des coefficients donne :

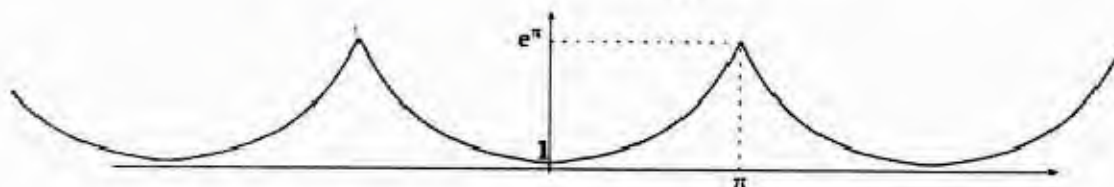
$$a_0 = \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi}, \quad a_n = 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1 + n^2} \quad \text{et} \quad b_n = 0.$$

On a alors :

$$S_1(x) = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1} \cos(nx) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ e^{-x} & \text{si } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$



Graphique de la fonction  $f(x)$



Graphique de la fonction  $S_1(x)$  identique à celui de  $\tilde{f}_1(x)$

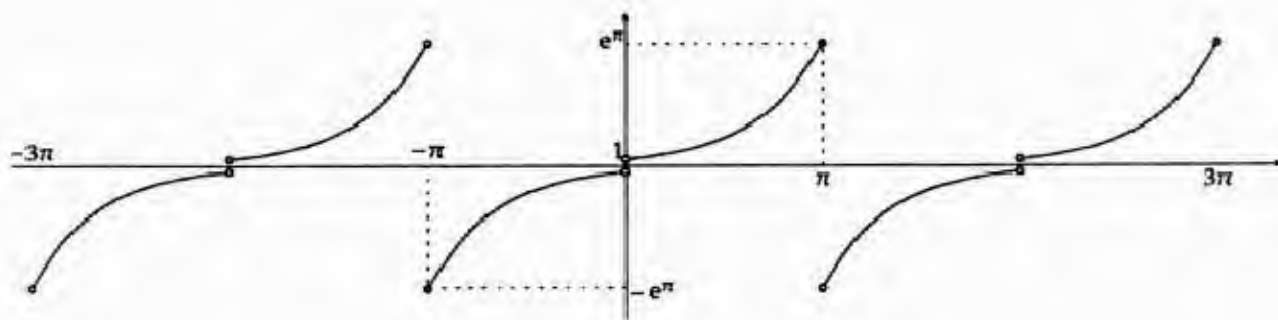
- b) Choisissons un prolongement impair et posons :  $\tilde{f}_2(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ -e^{-x} & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$ . On remarque que  $\tilde{f}_2$  est une fonction impaire mais n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est discontinue en tout point de la forme  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Le calcul des coefficients donne :

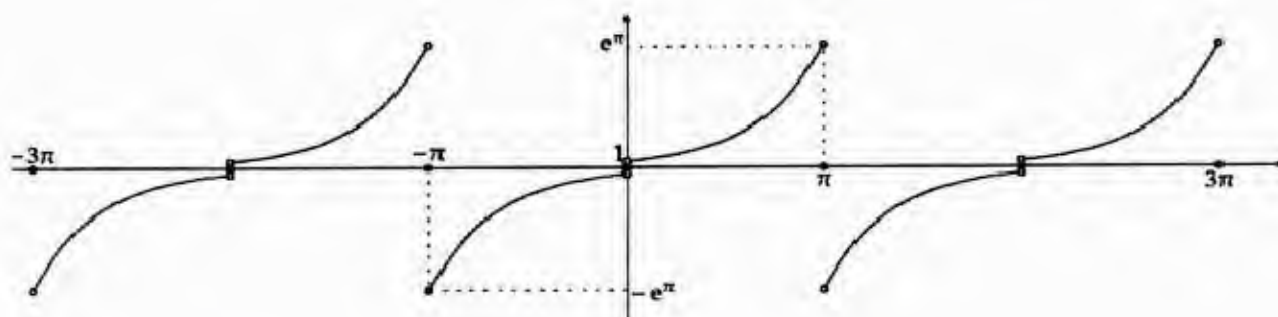
$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{2n(1 - (-1)^n e^\pi)}{\pi(1 + n^2)}.$$

On a alors :

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - (-1)^n e^\pi)}{\pi(1 + n^2)} \sin(nx) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ -e^{-x} & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi \end{cases}$$



Graphe de la fonction  $\tilde{f}_2(x)$

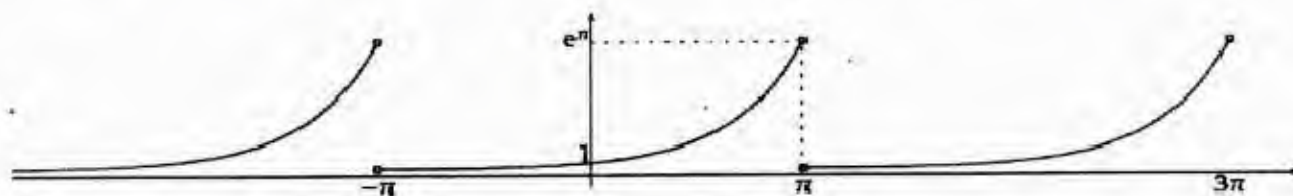


Graphe de la série  $S_2(x)$

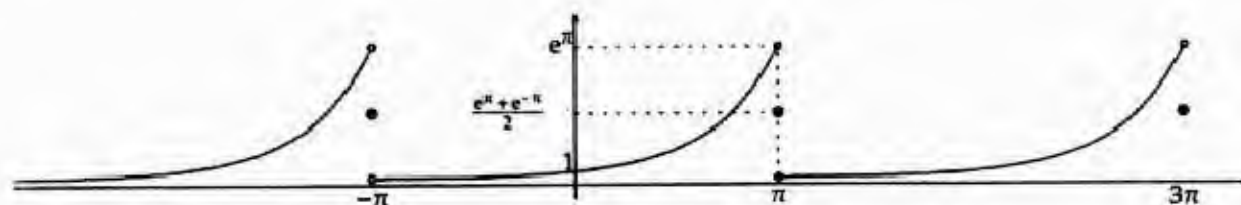
- c) Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons :  $\tilde{f}_3(x) = e^x$  si  $x \in ]-\pi, \pi[$ . On remarque que  $f$  est une fonction discontinue en tout point de la forme  $\pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . On a le résultat final :

$$S_3(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} (\cos(nx) - n \sin(nx)) \right) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]-\pi, \pi[ \\ \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} & \text{si } x = \pm\pi. \end{cases}$$

On a obtenu trois séries différentes qui valent exactement  $e^x$  sur l'intervalle  $]0, \pi[$ . On pouvait choisir d'autres prolongements et obtenir d'autres séries.



Graphe de la fonction  $\tilde{f}_3(x)$

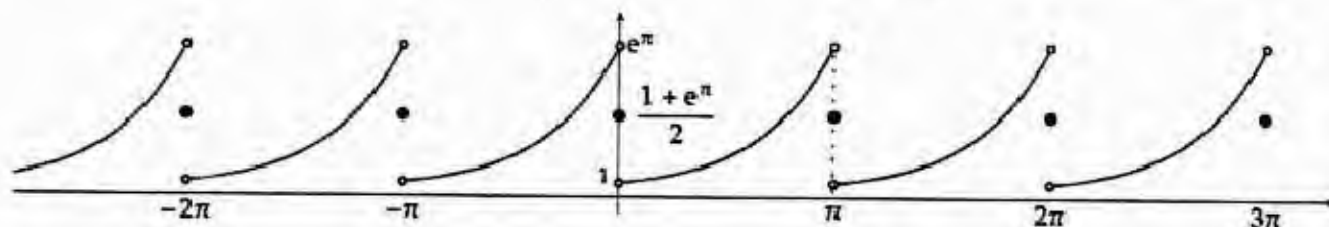


Graphe de la série  $S_3(x)$



**Remarque.** Si on voulait une série de Fourier de période  $\pi$ , alors il n'y a qu'une seule qui coïncide avec  $f$  sur  $]0, \pi[$ . On trouve

$$S_4(x) = \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} (\cos(2nx) - 2n \sin(2nx)) \right) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ \frac{1 + e^\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi. \end{cases}$$



Graphe de la série  $S_4(x)$

## Egalité de Parseval

### Théorème 3

Égalité de Parseval : Soit  $f$  une fonction développable en série de Fourier et de période  $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$ , alors on a pour  $\alpha$  réel quelconque :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi/\omega} f^2(x) dx$$

**Remarques.** 1) Si  $f$  est périodique de période  $2\pi$ , on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

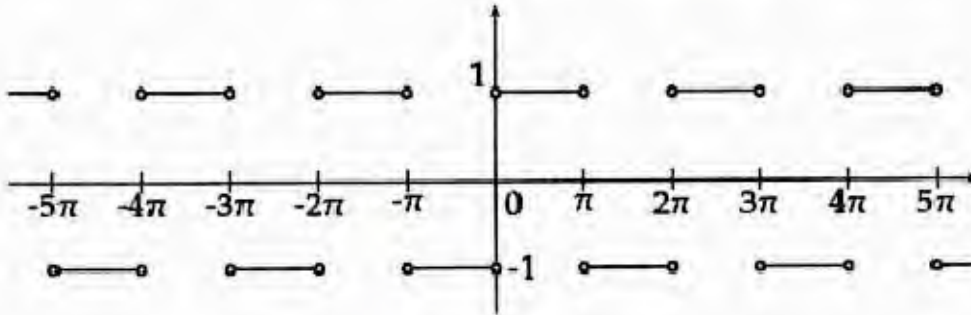
2)

$$\begin{aligned} f \text{ fonction paire} &\implies f^2 \text{ fonction paire} \implies \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx \\ f \text{ fonction impaire} &\implies f^2 \text{ fonction paire} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx \end{aligned}$$

# APPLICATIONS

**Exemple 1.**  $f$  étant une fonction  $2\pi$ -périodique telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ -1 & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$$



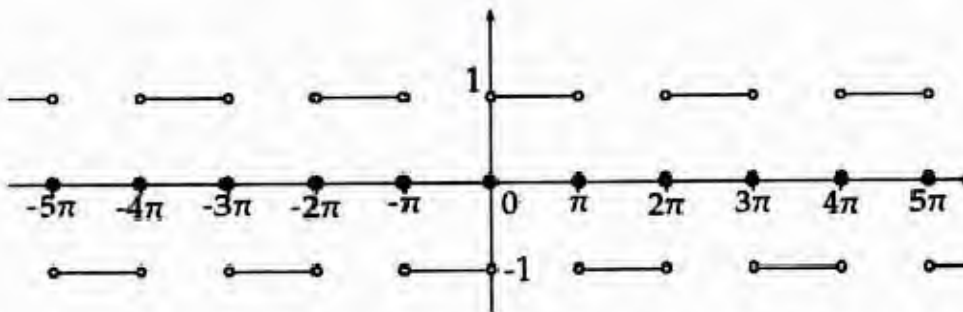
Graphes de la fonction  $f(x)$

$f$  étant une fonction impaire  $\implies a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

On a :  $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt) dt = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

La série de Fourier associée est :

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou si } x = \pi \end{cases}$$



Graphes de la fonction  $S(x)$

## Remarque 1

Pour  $x = \pi/2$  on a  $S(\pi/2) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Et d'après l'égalité de Parseval, on a



$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Et par suite on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

**Remarque 2.** Posons  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  série convergente d'après le critère de Riemann. En séparant les pairs et les impairs, on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad (*)$$

Comme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{S}{4}$ . En substituant dans l'égalité (\*), on a

$$S = \frac{S}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \iff \frac{3S}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \iff S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Exemple 2.**  $f$  étant une fonction  $2\pi$ -périodique telle que

$$f(x) = |x| \quad \text{si } x \in [-\pi, \pi]$$

$f$  étant une fonction paire  $\implies b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

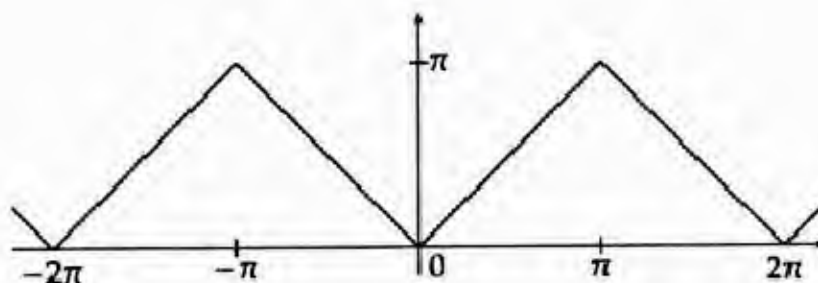
$$\text{On a : } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \left( \frac{t^2}{2} \right)_0^{\pi} = \pi.$$

$$\begin{aligned} \text{Puis on a : } a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \left( \left[ \frac{t \sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{n} dt \right) \\ &= \frac{-2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin nt dt = \frac{2}{n\pi} \left( \frac{\cos nt}{n} \right)_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

La série associée est donc

$$S(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

$f$  étant une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , et admet partout des dérivées à droite et à gauche alors  $f(x) = S(x), \forall x \in \mathbb{R}$ .



Graphes de la fonction  $f(x)$  et celui de  $S(x)$ .

**Remarque.** Pour  $x = 0$ , on a  $f(0) = 0$  et comme  $f(0) = S(0)$ , on déduit :

$$S(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

L'égalité de Parseval donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

**Remarque.** En écrivant

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

On déduit alors

$$\frac{15S}{16} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

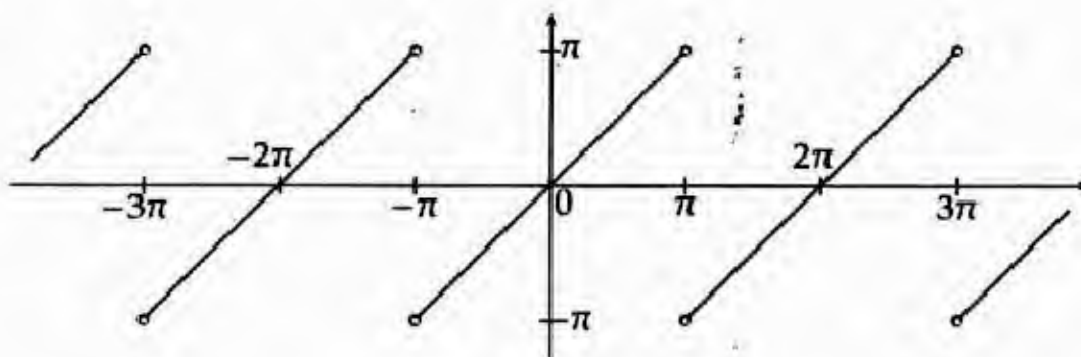
D'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

**Exemple 3.**  $f$  étant une fonction  $2\pi$ -périodique telle que

$$f(x) = x \quad \text{si } x \in ]-\pi, \pi[$$



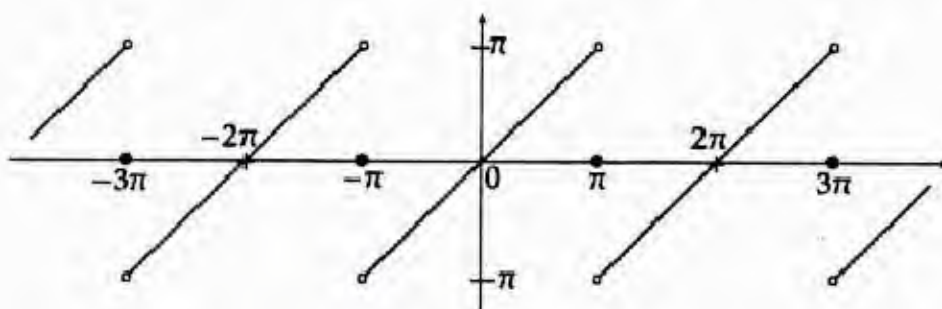


Graphique de la fonction  $f(x)$

$f$  est une fonction impaire, continue pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , sauf aux points  $x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Elle admet en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle admet un développement en série de Fourier.  $f$  : impaire  $\Rightarrow a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , et l'on a

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[ \left( \frac{-t \cos nt}{n} \right)_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nt}{n} dt \right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq (2k+1)\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = (2k+1)\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Graphique de la fonction  $S(x)$

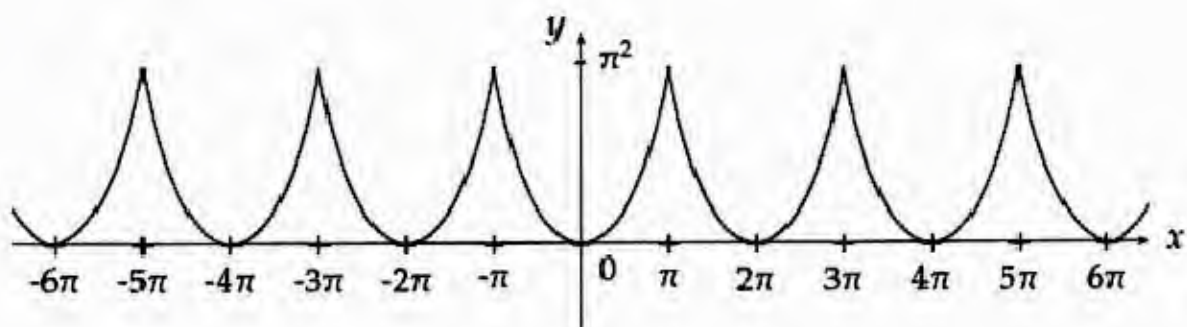
**Remarque.** En appliquant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t^2 dt = \frac{\pi^2}{3} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**Exemple 4.**  $f$  étant une fonction  $2\pi$ -périodique telle que

$$f(x) = x^2 \quad \text{si } x \in ]-\pi, \pi]$$

$f$  est une fonction paire, continue pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Elle admet en chaque point une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle admet un développement en série de Fourier.



Graphes de la fonction  $f(x)$  et celui de  $S(x)$ .

$f$  : paire  $\Rightarrow b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , et l'on a

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3} \text{ et } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos nt dt = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Comme  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , on a donc  $f(x) = S(x)$ , on a donc

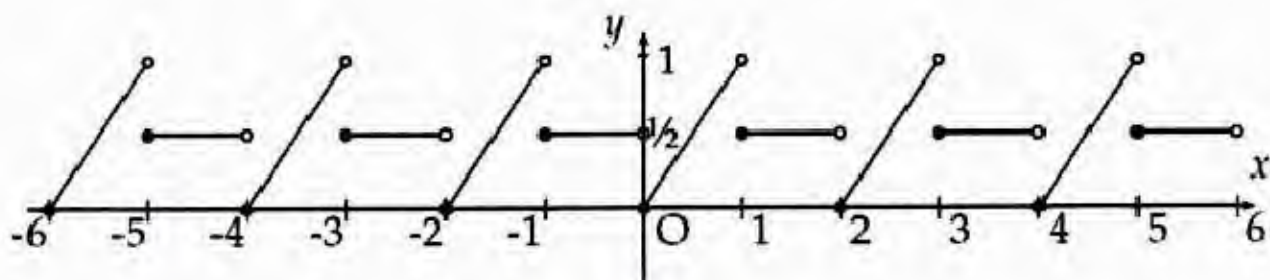
$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Le graphe de  $f(x)$  et de  $S(x)$  sont identiques.

**Remarque.** Pour  $x = 0$ , on a  $f(0) = 0$  et comme  $f(0) = S(0)$ , on déduit que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ .

**Exemple 5.**  $f$  étant une fonction de période 2 telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$



Graphes de la fonction  $f(x)$ .

$f$  n'est ni paire ni impaire et ne présente des discontinuités que pour les points d'abscisses un nombre entier positif ou négatif.  $f$  admet alors un développement de Fourier.

On a  $p = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \Leftrightarrow \omega = \pi$ .



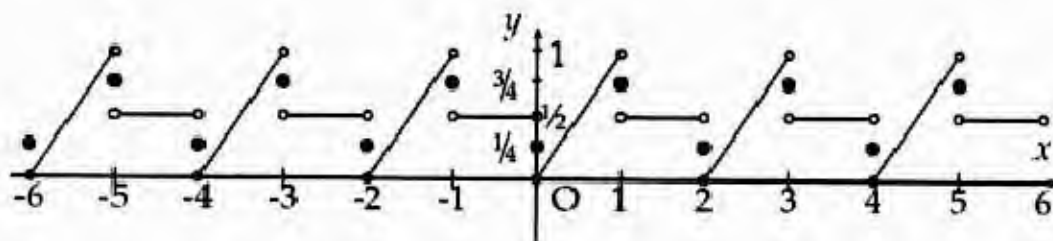
$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_{\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 t dt + \int_1^2 \frac{1}{2} dt = 1 \\
 a_n &= \int_0^1 t \cos n\pi t dt + \int_1^2 \frac{\cos n\pi t}{2} dt = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \\
 b_n &= \int_0^1 t \sin n\pi t dt + \int_1^2 \frac{\sin n\pi t}{2} dt = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{2n\pi}
 \end{aligned}$$

La série de Fourier associé à  $f$  est donc

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

En prenant les demi-sommes aux points des discontinuités, on pour  $x \in [0, 2[$ ,

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$$



Graphes de la fonction  $S(x)$ .

**Exemple 6.** Donner la série de Fourier en sinus de la fonction

$$f(x) = \cos x \quad \text{pour } x \in ]0, \pi[.$$

On va faire un prolongement en fonction impaire de la fonction  $f$ . Comme la fonction sinus est de période  $2\pi$ , posons alors :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \cos x & \text{si } x \in ]0, \pi[ \\ -f(-x) = -\cos x & \text{si } x \in ]-\pi, 0[ \end{cases}$$

La fonction  $\tilde{f}$  est une fonction impaire de période  $2\pi$ , continue partout sur  $\mathbb{R}$  sauf aux points  $x = k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$ , où elle n'est pas définie, et coïncide avec la fonction  $f$  sur  $]0, \pi[$ . Elle admet donc un développement de Fourier. Comme  $\tilde{f}$  est impaire alors  $a_n = 0$ , et on trouve par calcul d'intégrales que

$$b_{2n+1} = 0 \text{ et } b_{2n} = \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)}$$

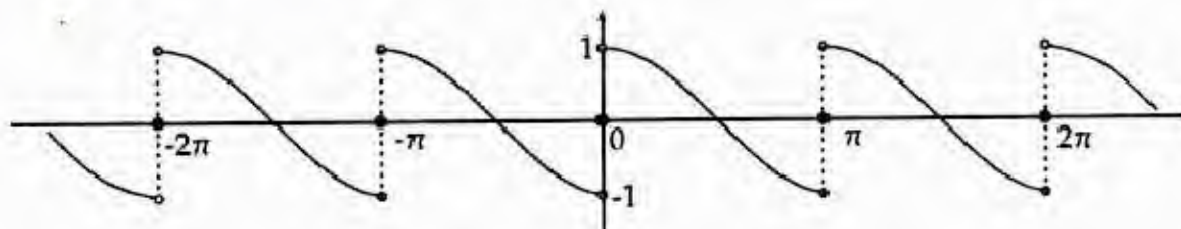
Et alors

$$\forall x \in ]0, \pi[ \quad \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2 - 1)} \sin 2nx$$

**Remarque.** La demi somme aux points de discontinuité est égale à 0, et on a

$$S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1} = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi, (2k+1)\pi[ \\ -\cos x & \text{si } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ](2k+1)\pi, (2k+2)\pi[ \\ 0 & \text{si } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La fonction  $S(x)$  est périodique de période  $\pi$ .



Graphique de la fonction  $S(x)$ .



## Quelques développements intéressants.

1)  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  et  $x \in [-\pi, \pi]$

$$\cos \alpha x = \frac{2\alpha \sin \pi \alpha}{\pi} \left( \frac{1}{2\alpha^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\pi(n^2 - \alpha^2)} \right)$$

2) Fonction impaire de période  $2l$ , alors

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{\ell} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4n^2 - 1} \sin \frac{2n\pi x}{\ell} = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{\ell} & \text{pour } 0 \leq x < \frac{\ell}{2} \\ 0 & \text{pour } \frac{\ell}{2} < x \leq \ell \\ \frac{1}{2} & \text{pour } x = \frac{\ell}{2} \end{cases}$$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{-\pi - x}{2} & \text{pour } -2\pi < x < 0 \\ \frac{\pi - x}{2} & \text{pour } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{pour } x = 0, x = 2\pi, x = -2\pi. \end{cases}$$

4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \begin{cases} \frac{3x^2 + 6\pi x + 2\pi^2}{12} & \text{pour } -2\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} & \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

5)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \begin{cases} \frac{x^2 + 3\pi x + 2\pi^2 x}{12} & \text{pour } -2\pi \leq x \leq 0 \\ \frac{x^2 - 3\pi x + 2\pi^2 x}{12} & \text{pour } 0 \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$



ETUSUP.com

Programmmation  
**Cours**  
Electricité  
Physique  
Résumés  
Analyse  
Livres  
**Exercices**  
Contrôles Continus  
Langues  
Thermodynamique  
Multimedia  
**Divers**  
Economie  
Travaux Dirigés  
Chimie Organique  
Informatique  
Optique  
Chimie  
Diapo  
Algèbre  
Corrigés  
Mathématiques  
Mécanique  
Travaux Pratiques  
Droit

et encore plus..